

INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

<http://balkanski-foundation.org/>

Concours Général de Mathématiques «Minko Balkanski»

1 août 2023

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Употребата на калкулатори е позволена.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете кратки, точни и ясни. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Задачите носят еднакъв брой точки.

Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie

Français

Problème I

Soient a, b, c des réels positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

si et seulement si exactement deux parmi a, b, c sont dans $(0, 1)$.

Problème II

On se donne un triangle aigu ABC avec orthocentre H . Le cercle k_1 passe par les points B et C et intersecte le cercle k_2 avec diamètre AH en deux points distincts notés X et Y . Soit D le pied de la hauteur issue de A vers BC , et soient B' et C' les points d'intersection des droites AC et AB avec la droite XY , respectivement. Montrer que $\angle ADB' = \angle ADC'$.

Problème III

Dans une petite école il y a deux classes de première et deux classes de terminale. En fin de l'année scolaire les élèves en première sont redistribués dans les deux classes de terminale. Afin qu'ils ne soient pas isolés dans leur nouvelle classe, chaque élève en première soumet une liste d'exactement $k \geq 1$ autres élèves (distincts) en première qu'il souhaite avoir dans sa nouvelle classe. L'administration de l'école se charge alors de former des classes de sorte à ce que pour chaque élève au moins un parmi les k amis de sa liste soit dans sa classe. Aucune contrainte n'est imposée sur les tailles des deux classes de terminale, en particulier il n'y a pas besoin qu'elles soient égales ni non-nulles.

Un groupe de $n \geq 1$ élèves cherche une stratégie pour établir leurs listes de sorte à obliger l'école à les affecter dans la même classe. La directrice ne veut pas que tous ces coquins se retrouvent ensemble, mais elle tient à suivre la règle traditionnelle d'affectation. Pour quelles valeurs de n et k les n élèves ont-ils une stratégie pour se mettre dans la même classe ?

Indication : Montrer que pour tout graphe dirigé de degré sortant minimal supérieur ou égal à 3, il existe deux cycles dirigés disjoints par sommets.

———— FIN DE L'ENONCE ———

Part II

English

Problem I

Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

if and only if exactly two among a, b, c are in $(0, 1)$.

Problem II

Let ABC be an acute-angled triangle with orthocenter H . A circle k_1 passes through the points B and C , and intersects the circle k_2 with diameter AH at two distinct points denoted X and Y . Let D be the foot of the perpendicular from A to the line BC , and let B' and C' be the points where the lines AC and AB intersect the line XY , respectively. Show that $\angle ADB' = \angle ADC'$.

Problem III

In a small high school there are two eleventh grade classes and two twelfth grade classes. At the end of the school year eleventh grade students are reshuffled in the two twelfth grade classes. In order for students not to be isolated in their new class, each eleventh grade student submits a list of exactly $k \geq 1$ other (different) eleventh grade students with whom the student would like to be in the same class. The school principal then forms the classes so that each student is in the same class as at least one of the k friends on his list. The sizes of the two twelfth grade classes are not constraint and, in particular, need not be equal or non-zero.

A group of $n \geq 1$ students is looking for a strategy for constructing their lists so that the school is obliged to attribute them to the same class. The principal would not like these trouble-makers to be together, but she is determined to follow the traditional rule for distributing students. For which values of n and k do the n students have a strategy to end up in the same class?

Hint: Prove that for any directed graph with minimum out-degree at least 3 there are two directed vertex-disjoint cycles.

———— END OF PAPER ———