

INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

<http://balkanski-foundation.org/>

Concours Général de Mathématiques «Minko Balkanski»

27 août 2022

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете кратки, точни и ясни. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Задачите носят еднакъв брой точки.

Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie

Français

Problème I

Soient $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ trois polynômes réels de degré 2. On sait que $3f(x) - 7g(x) - 2h(x)$, $f(x) + g(x) - 4h(x)$ et $f(x) + g(x) + h(x)$ sont des polynômes de deuxième degré ayant chacun une unique racine réelle. De plus, $f(x)$ et $g(x)$ ont chacun deux racines réelles. Montrer que si $h(0) = 0$, alors $f(0) + g(0) = 0$.

Problème II

Soit ABC un triangle non-isocèle et avec trois angles aigus. L'altitude h_C coupe le segment AB au point C_1 . Notons par c_1 et c_2 les cercles exinscrits des triangles AC_1C et BC_1C , opposés au sommet C (autrement dit, c_1 par exemple touche le segment AC_1 et les rayons CA et CC_1 après A et C_1 respectivement). Supposons que les deux tangentes externes communes des cercles c_1 et c_2 se coupent au point C' . Construisons les points A' et B' de manière analogue. Montrez que A' , B' et C' sont colinéaires.

Problème III

Pour un graphe $G = (V, E)$ et deux arêtes disjointes u_1u_2 et v_1v_2 dans E , on dit qu'un ordonnancement des sommets $\sigma : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$ sépare u_1u_2 et v_1v_2 si soit $\max(\sigma(u_1), \sigma(u_2)) < \min(\sigma(v_1), \sigma(v_2))$, soit $\max(\sigma(v_1), \sigma(v_2)) < \min(\sigma(u_1), \sigma(u_2))$. Une famille d'ordonnements \mathcal{F} de V est dite *bonne* si pour toute paire d'arêtes disjointes de G il y a un ordonnancement dans \mathcal{F} qui les sépare. Notons par $s(G)$ la plus petite taille d'une bonne famille d'ordonnements de V .

Fixons $s_1, s_2 \in \{1, 2, \dots\}$ et Supposons qu'il existe deux ensembles disjoints nonvides $V_1, V_2 \subset V$ et des entiers strictement positifs $s_1 \leq |V_1|$ et $s_2 \leq |V_2|$ de sorte que la propriété suivante soit vraie. Pour tout sous-ensemble $W_1 \subseteq V_1$ de taille s_1 et pour tout sous-ensemble $W_2 \subseteq V_2$ de taille s_2 , il existe au moins une arête entre W_1 et W_2 . Montrez que

$$s(G) \geq \min(\log_2(|V_1|/s_1), \log_2(|V_2|/s_2)).$$

———— FIN DE L'ENONCE ———

Part II

English

Problem I

Let $f(x)$, $g(x)$ and $h(x)$ be three real polynomials of degree 2. We know that $3f(x) - 7g(x) - 2h(x)$, $f(x) + g(x) - 4h(x)$ and $f(x) + g(x) + h(x)$ are polynomials of degree 2, and each of them has a unique real root. Moreover, $f(x)$ and $g(x)$ both have two real roots. Prove that if $h(0) = 0$, then $f(0) + g(0) = 0$.

Problem II

Let ABC be an acute-angled non-isosceles triangle. The altitude h_C intersects the segment AB at point C_1 . Construct the escribed circles c_1 and c_2 of the triangles AC_1C and BC_1C , opposite the vertex C (more precisely, c_1 for example touches the segment AC_1 and the rays CA and CC_1 after A and C_1 respectively). Let the two common outer tangents to c_1 and c_2 intersect at the point C' . Construct A' and B' similarly. Then, prove that A' , B' and C' are collinear.

Problem III

Given a graph $G = (V, E)$ and any two disjoint edges u_1u_2 and v_1v_2 in E , we say that an ordering of the vertices $\sigma : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$ separates u_1u_2 and v_1v_2 if either $\max(\sigma(u_1), \sigma(u_2)) < \min(\sigma(v_1), \sigma(v_2))$ or $\max(\sigma(v_1), \sigma(v_2)) < \min(\sigma(u_1), \sigma(u_2))$. A family \mathcal{F} of orderings of V is *good* if for every pair of disjoint edges of G there is an ordering in \mathcal{F} that separates them. Denote by $s(G)$ the smallest size of a good family of orderings of V .

Suppose that there are two disjoint non-empty sets $V_1, V_2 \subset V$ and positive integers $s_1 \leq |V_1|$ and $s_2 \leq |V_2|$ such that the following holds. For subset $W_1 \subseteq V_1$ of size s_1 and every subset $W_2 \subseteq V_2$ of size s_2 , there is at least one edge of G between W_1 and W_2 . Show that

$$s(G) \geq \min(\log_2(|V_1|/s_1), \log_2(|V_2|/s_2)).$$

———— END OF PAPER ———