

INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

<http://balkanski-foundation.org/>

Concours Général de Mathématiques “Minko Balkanski”

14 août 2021

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете кратки, точни и ясни. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Задачите носят еднакъв брой точки.

Ако намерите грешка в условията на задачите, отбележете я в работата си и продължете **без да повдигате въпроси към квесторите**.

Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie

Français

Problème I

Soit a_n une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} - a_n - a_n^2 = 0$. Montrer que soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Problème II

a. Ivo et Marius sont pressés. Ils veulent se rendre du point A au point B situé à 2 kilomètres. Malheureusement, ils disposent seulement d'un vélo. Chacun d'entre eux roule à 20km/h et marche à 5km/h. Dans combien de temps au minimum peuvent-ils se retrouver au point B ?

b. Les deux ont trouvé l'expérience marrante et le jour suivant décident de la partager avec quelques amis. Ainsi $n \geq 1$ personnes partent du point A simultanément, disposant de $0 \leq k \leq n$ vélos. Tout le monde a les mêmes vitesses à pied et en vélo qu'Ivo et Marius. En combien de temps peuvent-ils se retrouver au point B ?

Problème III

Trouver tous les entiers strictement positifs (a, b, p, q, n) tels que

$$\frac{a! + b!}{(p-1)! + (q-1)!} = \frac{3(n^2 + 1)}{2},$$

avec p et q premiers tels que 12 divise $p - 7$ et $q - 7$.

———— FIN DE L'ENONCE ———

Part II

English

Problem I

Let a_n be a sequence of real numbers such that $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} - a_n - a_n^2 = 0$. Prove that either $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Problem II

a. Ivo and Marius are in a hurry. They want to go from point A to point B located 2 kilometres away. Unfortunately, they have only one bike. Each of them rides at 20km/h and walks at 5km/h. What is the minimum amount of time they need to meet at point B ?

b. The two found the experience fun and decided to share it with a few friends the next day. Hence, $n \geq 1$ people depart from point A simultaneously with a total of $0 \leq k \leq n$ bikes. Everyone rides and walks with the same speed as Ivo and Marius do. In how much time can they meet at point B ?

Problem III

Find all (a, b, p, q, n) positive integers satisfying

$$\frac{a! + b!}{(p-1)! + (q-1)!} = \frac{3(n^2 + 1)}{2},$$

such that p and q are prime numbers and 12 divides $p - 7$ and $q - 7$.

———— END OF PAPER ———