

# INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

<http://balkanski-foundation.org/>

## Concours Général de Mathématiques “Minko Balkanski”

17 août 2020

Прочетете внимателно!

**Част първа и част втора** съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Задачите носят еднакъв брой точки.

Ако намерите грешка в условията на задачите, отбележете я в работата си и продължете **без да повдигате въпроси към квесторите**.

Разполагате с **4 часа**. Успех!



# Première partie

## Français

### Problème I

On se donne un triangle  $ABC$  et un point  $F$  dans son intérieur. On suppose que  $AF$ ,  $BF$  et  $CF$  coupent  $BC$ ,  $AC$  et  $AB$  en  $P_a$ ,  $P_b$  et  $D$  respectivement. Soit  $H$  le pied du perpendiculaire de  $D$  vers  $P_aP_b$  et soient  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $H'_a$ ,  $H'_b$  les pieds des perpendiculaires de  $H$  vers  $AP_a$ ,  $BP_b$ ,  $BC$  et  $AC$  respectivement. Montrer que  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $H'_a$ ,  $H'_b$  sont cocycliques.

### Problème II

a. Soit  $n \geq 1$  un entier. Montrer que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

b. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies par  $u_0 = 17$ ,  $v_0 = 18$  et pour tout  $n \geq 0$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + \frac{2020}{u_n}.$$

Montrer que les suites  $1/u_n$  et  $1/v_n$  convergent et trouver leurs limites.

### Problème III

Soient  $n, k \geq 2$  des entiers. Thomas joue au jeu suivant avec le diable. Le diable a écrit la liste des nombres entiers sur une ligne. Thomas dispose de  $n$  jetons, tandis que le diable en a une quantité illimitée. Initialement Thomas place ses jetons sur des entiers différents de son choix. Après le diable effectue les opérations suivantes.

1. S'il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel qu'il y a des jetons sur  $m+k$  et  $m+k-1$ , mais il n'y en a pas sur  $m$ , alors le diable place un jeton sur  $m$  (s'il y a plusieurs tels  $m$ , le diable choisit par lequel commencer) et répète opération 1. Sinon, il procède à opération 2.
2. S'il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel qu'il y a des jetons sur  $m-k$  et  $m-k+1$ , mais il n'y en a pas sur  $m$ , alors le diable place un jeton sur  $m$  (s'il y a plusieurs tels  $m$ , le diable choisit par lequel commencer) et revient à opération 1.

Si Thomas arrive à forcer le diable à continuer à placer des jetons à l'éternité, il est déclaré vainqueur. Sinon, le diable gagne.

Etant donné  $k$ , pour quelles valeurs de  $n$  Thomas gagner ?

———— FIN DE L'ENONCE ———

## Part II

# English

### Problem I

Let  $ABC$  be a triangle and  $F$  be an arbitrary point in its interior. Suppose that  $AF$ ,  $BF$  and  $CF$  intersect  $BC$ ,  $AC$  and  $AB$  in points  $P_a$ ,  $P_b$  and  $D$  respectively. Let  $H$  be the foot of the perpendicular from  $D$  to  $P_aP_b$  and let  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $H'_a$ ,  $H'_b$  be the feet of the perpendiculars from  $H$  to  $AP_a$ ,  $BP_b$ ,  $BC$  and  $AC$  respectively. Prove that  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $H'_a$ ,  $H'_b$  are cocyclic.

### Problem II

- a. Let  $n \geq 1$  be an integer. Show that

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

- b. Let  $(u_n)$  and  $(v_n)$  be two sequences defined by  $u_0 = 17$ ,  $v_0 = 18$  and for all  $n \geq 0$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{v_n} \quad \text{and} \quad v_{n+1} = v_n + \frac{2020}{u_n}.$$

Prove that the sequences  $1/u_n$  and  $1/v_n$  converge and determine their limits.

### Problem III

Let  $n, k \geq 2$  be integers. Thomas is playing the following game with the devil. The devil has written out the integer numbers in a row. Thomas is given  $n$  tokens, while the devil has an infinite supply of them. Initially Thomas places his tokens on distinct integers of his choice. Then the devil has to execute the following procedure.

1. If there exists  $m \in \mathbb{Z}$  such that there are tokens on  $m+k$  and  $m+k-1$ , but not on  $m$ , then the devil places a token on  $m$  (if there are several such  $m$ , the devil chooses which one to add first) and repeats step 1. Otherwise, he proceeds to step 2.
2. If there exists  $m \in \mathbb{Z}$  such that there are tokens on  $m-k$  and  $m-k+1$ , but not on  $m$ , then the devil places a token on  $m$  (if there are several such  $m$ , the devil chooses which one to add first) and goes back to step 1.

If Thomas manages to force the devil to continue placing tokens forever, he is declared winner. Otherwise, the devil wins.

Given  $k$ , for which values of  $n$  can Thomas win?

———— END OF PAPER ———