

INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

<http://balkanski-foundation.org/>

Concours Général de Mathématiques “Minko Balkanski”

18 mai 2019

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Задачите носят еднакъв брой точки.

При намиране на грешка в условията на задачите, я отбележете в работата си и продължете **без да повдигате въпроси към квесторите**.

Класирането ще бъде изложено на сайта <http://balkanski-foundation.org/> в началото на месец юни. Ако имате въпроси и коментари, можете да ги насочите към svilen.iskrov@gmail.com. С първенците ще се свържем чрез e-mail или по телефон. Попълнете правилно информацията за контакт.

Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie

Français

Problème I

Dans un bâtiment il y a $n + 1$ étages numérotés de 0 à n . A l'étage i il y a i personnes attendant l'ascenseur, qui se trouve initialement à l'étage 0. L'ascenseur a une capacité de 5 personnes. Il prend 2 secondes pour monter ou descendre d'un étage et 8 secondes pour ouvrir et fermer ses portes. Proposer une procédure minimisant le temps nécessaire aux gens pour descendre tous à l'étage 0 pour

a. $n = 101$.

b. $n = 100$.

Dans les deux cas il n'est pas demandé de calculer explicitement le temps minimal, même si c'est possible.

Problème II

Deux cercles k_1 et k_2 de centres O_1 et O_2 respectivement s'intersectent en deux points distincts A et B . La droite O_1B intersecte k_2 au point C distinct de B . La droite O_2B intersecte k_1 au point D distinct de B . Les tangentes à k_1 au point D et à k_2 au point C s'intersectent en F . Montrer que les points F , B et le centre I du cercle circonscrit à ACD sont collinéaires.

Problème III

Soit $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. On considère les fonctions $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telles que pour tous m, n, k dans \mathbb{N} on ait

$$f(m + n^k) | f(m) + f(n)^{f(k)}.$$

a. Trouver toutes les solutions f non-décroissantes.

b. On dit que deux fonctions f, g sont équivalentes s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq n$ on a $f(m) = g(m)$. Trouver à équivalence près toutes les solutions f avec $f(1) = 1$.

———— FIN DE L'ENONCE ———

Part II

English

Problem I

In a building there are $n + 1$ floors numbered from 0 to n . On floor number i , there are i people waiting for the elevator that is initially on the 0-th floor. The elevator's capacity is 5 people at a time. It takes two seconds for the elevator to go one floor up or down and it takes eight seconds to open and close its doors. Give a procedure minimising the time needed for all people to reach the ground floor for

- a. $n = 101$.
- b. $n = 100$.

In both cases it is not asked to compute explicitly the minimal time, even if it is possible.

Problem II

Two circles k_1 and k_2 with centres O_1 and O_2 respectively intersect at two different points A and B . The line O_1B intersects k_2 at point C different from B . The line O_2B intersects k_1 at point D different from B . The tangents to k_1 at D and to k_2 at C intersect at F . Prove that the points F , B and the center I of the circumscribed circle k of triangle ACD are collinear.

Problem III

Let $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Consider functions $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ such that for any triple of positive integers (m, n, k) we have

$$f(m + n^k) | f(m) + f(n)^{f(k)}.$$

- a. Determine all such non-decreasing functions f .
- b. We say that two functions f, g are equivalent if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that for all $m \geq \mathbb{N}$ we have $f(m) = g(m)$. Determine up to equivalence all solutions f for which $f(1) = 1$.

———— END OF PAPER ———