

# INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

<http://balkanski-foundation.org/>

## Concours Général de Mathématiques “Minko Balkanski”

3 juin 2018

Прочетете внимателно!

**Част първа и част втора** съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Задачите носят еднакъв брой точки.

При намиране на грешка в условията на задачите отбележете я в работата си и продължете **без да повдигате въпроси към квесторите**.

Класирането ще бъде изложено на сайта <http://balkanski-foundation.org/> в началото на месец юни. Ако имате въпроси и коментари можете да ги насочите към [svilen.iskrov@gmail.com](mailto:svilen.iskrov@gmail.com). С първенците ще се свържем чрез e-mail или по телефон. Попълнете правилно информацията за контакт.

Разполагате с **4 часа**. Успех!



# Première partie

## Français

### Problème I

Trouver toutes les solutions  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  en entiers relatifs de l'équation

$$x^3 - y^3 = 37x.$$

### Problème II

On se donne un triangle  $ABC$ , dont tous les angles sont aigus (c.à.d. plus petits que  $90^\circ$ ). Soient  $B'$  et  $C'$  les projetés orthogonaux de  $B$  et  $C$  sur  $AC$  et  $AB$  respectivement. Soient  $B''$  et  $C''$  les projetés orthogonaux de  $B'$  et  $C'$  sur  $AB$  et  $AC$  respectivement. Les cercles circonscrits de  $\triangle BC'C''$  et  $\triangle CB'B''$  se coupent en  $A_1$  et  $A_2$ . On construit les points  $B_1, B_2$  et  $C_1, C_2$  par analogie. Montrez que les droites  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  et  $C_1C_2$  ont un point commun.

### Problème III

Laure a  $n$  jetons dans sa poche et elle a écrit sur une feuille (très longue donc) la liste de tous les entiers positifs dans l'ordre. Il y a un jeton (non compté dans les  $n$ ) sur 0, qu'elle n'a pas le droit de bouger. À chaque tour, si elle a un jeton sur  $k$ , mais aucun sur  $k+1$ , elle peut placer un jeton de sa poche sur  $k+1$ . Si, au contraire, elle a un jeton sur  $k$  et un sur  $k+1$ , elle peut remettre le jeton de  $k+1$  dans sa poche. Elle fait une seule opération de ce type à la fois. Ainsi elle peut toujours placer un jeton de sa poche sur 1, à condition qu'il n'y en a pas déjà un, ou retirer un jeton de 1, s'il y en a. Existe-t-il un nombre maximal, sur lequel elle pourra placer un jeton ? Si oui, trouvez-le.

### Problème IV

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$ . On note  $f^{\circ n}(x) = f(f(\cdots(f(x))\cdots))$ , où  $f$  est itérée  $n$  fois, ce qui définit la fonction continue  $f^{\circ n}$  toujours de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ . Supposons qu'il existe  $x_3 \in [0, 1]$  tel que  $f^{\circ 3}(x_3) = x_3$ , mais  $f(x_3) \neq x_3$ . Montrer que pour tout entier naturel non-nul  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in [0, 1]$  tel que  $n = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} | f^{\circ k}(x_n) = x_n\}$ , c'est-à-dire  $x_n$  est un point périodique de période exacte  $n$  pour  $f$ .

———— FIN DE L'ENONCE ————

## Part II

# English

### Problem I

Find all integer solutions  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  to the equation

$$x^3 - y^3 = 37x.$$

### Problem II

An acute triangle  $ABC$  is given (i.e. all three angles are smaller than  $90^\circ$ ). Let  $B'$  and  $C'$  be the orthogonal projections of  $B$  and  $C$  on  $AC$  and  $AB$  respectively. Let  $B''$  and  $C''$  be the orthogonal projections of  $B'$  and  $C'$  on  $AB$  and  $AC$  respectively. The circumscribed circles of  $\triangle BC'C''$  and  $\triangle CB'B''$  meet at  $A_1$  and  $A_2$ . The points  $B_1, B_2$  and  $C_1, C_2$  are constructed analogously. Show that the lines  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  and  $C_1C_2$  meet at one point.

### Problem III

Laure has  $n$  tokens in her pocket and she has listed all positive integers in order on a (very long) sheet of paper. There is a token (not counted among the  $n$ ) on the number 0, which she does not have the right to move. At each step, if she has a token placed on  $k$ , but none on  $k+1$ , she can put a token from her pocket on  $k+1$  (if she has any left). Her other option is to put a token from  $k+1$  back in her pocket, if she has a token on  $k$ . She does only one such move at a time. Hence, she can always place a token from her pocket on 1, if there is none or take it back, if there is one. Does there exist a maximal number, on which she could put a token? If yes, determine it.

### Problem IV

Let  $f$  be a continuous function on  $[0, 1]$  taking values in  $[0, 1]$ . Set  $f^{\circ n}(x) = f(f(\cdots(f(x))\cdots))$ , where  $f$  is iterated  $n$ -fold, which defines the continuous function  $f^{\circ n}$  from  $[0, 1]$  to  $[0, 1]$ . Assume that there exists  $x_3 \in [0, 1]$  such that  $f^{\circ 3}(x_3) = x_3$ , but  $f(x_3) \neq x_3$ . Prove that for every positive integer  $n \in \mathbb{N}$ , there exists  $x_n \in [0, 1]$  such that  $n = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} | f^{\circ k}(x_n) = x_n\}$ , i.e.  $x_n$  is a periodic point of exact period  $n$  for  $f$ .

———— END OF PAPER ———